معادلات

SUBJECT: ① $\frac{4}{2}$ / /

مثال 1: جد الحل: $x(y^2-1)dx + y(x^2-1)dy = 0$ ؟ وهي معادلة ذات متغيرات منفصلة

نقسم على الجداء ; $(y^2-1)(x^2-1) \neq 0$

$$\int \frac{2x}{2(x^2-1)} dx + \int \frac{2y}{2(y^2-1)} dy = \int 0$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2-1) + \frac{1}{2} \ln(y^2-1) = \ln c$$

$$\ln (x^2-1)(y^2-1) = \ln c$$

بأخذ الطرفين

الحل العام $\boxed{(x^2-1)(y^2-1) = c}$

---

3 المعادلة من الشكل: $y f(x.y) dx + x g(x.y) dy = 0$

لرد هذه المعادلة إلى معادلة ذات متغيرات منفصلة نجري التحويل التالي:

نعوض في المعادلة
$$\begin{cases} x.y = Z \Rightarrow y = \frac{Z}{x} \\ dy = \frac{x.dZ - Z dx}{x^2} \end{cases}$$

نوحد المقامات ثم

$$\frac{Z}{x} f(Z) dx + x \cdot g(Z) \cdot \left(\frac{x.dZ - Z dx}{x^2}\right)$$

$$Z f(Z) dx + x \cdot g(Z) dZ - Z g(Z) dx = 0$$

$\Leftarrow$ نقسم على $Z[f(Z)-g(Z)]$ ★ $Z[f(Z) - g(Z)] dx + x . g(Z) dZ = 0$

وهي معادلة ذات متغيرات منفصلة نفصل متغيراتها ثم نكامل فنحصل على الحل العام.

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{g(Z) . dZ}{Z[f(Z) - g(Z)]} = \int 0$$

بالعودة إلى متغيرات القديمة.

Scanned by CamScanner

مثال: جد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y(1-xy)\,dx - x(1+xy)\,dy = 0$$

لكي نرد هذه المعادلة إلى معادلة ذات متحولات منفصلة نجري التحويلات التالية:

$$x.y = Z \Rightarrow y = \frac{Z}{x} \Rightarrow dy = \frac{x\,dZ - Z\,dx}{x^2}$$

نعوض في المعادلة

$$\frac{Z}{x}(1-Z)\,dx - x(1+Z)\left(\frac{x\,dZ - Z\,dx}{x^2}\right) = 0$$

نضرب بـ x

$$Z(1-Z)\,dx - x(1+Z)\,dZ + Z(1+Z)\,dx = 0$$

فكينا الأقواس

$$[Z(1-Z) + Z(1+Z)]\,dx - x(1+Z)\,dZ = 0$$

نجمع الحدود ونطرح الأقواس ونفصل المتحولات فينتج لدينا:

$$\int \frac{1+Z}{Z}\,dZ = 2\int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dZ}{Z} + \int dZ = 2\ln x$$

$$\ln Z + Z = \ln x^2 + \ln c$$

$$\ln Z - \ln x^2 - \ln c = -Z$$

$$\ln \frac{Z}{cx^2} = -Z$$

نأخذ e للطرفين:

الحل العام

$$\frac{Z}{cx^2} = e^{-Z}$$

بالعودة إلى المتحولات القديمة ينتج لدينا:

$$x.y = c\,x^2 \cdot e^{-x.y}$$

* المعادلات التفاضلية المتجانسة:

الطريقة الأساسية لحل المعادلات التفاضلية هي طريقة فصل المتحولات وسندرس الآن عدة أنواع من المعادلات التي يمكن تحويلها إلى معادلات ذات حدود منفصلة وهي المعادلات المتجانسة.

ليكن لدينا $y' = f(x, y)$ ①

تعريف المعادلة المتجانسة: تدعى المعادلة ① متجانسة إذا كانت الدالة في الطرف الأيمن دالة متجانسة في كل من متحولاتها x, y من درجة الصفر أي إذا تحققت المطابقة التالية:

$$\forall \lambda \neq 0 \in \mathbb{R} : f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x, y) = f(x, y)$$

عندها نقول عنها متجانسة.

إذا افرضنا أن $\lambda = \frac{1}{x}$ عندها نحصل على الدالة:

$$f(x, y) = f(\lambda x, \lambda y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) \Rightarrow \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

وبالتالي فإن المعادلة ① تكتب على الشكل:

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad ②$$

وهي معادلة متجانسة يمكن إرجاعها إلى معادلة ذات متحولات منفصلة بإجراء التحويلات التالية:

$$\frac{y}{x} = Z \Rightarrow y = x \cdot Z \Rightarrow y' = Z + x Z'$$

مثال: جد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

نعوض كل x بـ λx وكل y بـ λy في الطرف الأيمن:

$$y' = \frac{\lambda^2 \, 2xy}{\lambda^2 (x^2 - y^2)} = \frac{2xy}{(x^2 - y^2)} = f(x, y)$$

نقسم البسط والمقام على x^2

فنصبح المعادلة على شكل:

$$y' = \frac{2\frac{y}{x}}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

فالمعادلة متجانسة نجري التحويل:

$$\frac{y}{x} = Z \Rightarrow y = x\cdot Z \Rightarrow y' = Z + x\cdot Z'$$

نعوض في المعادلة:

$$Z + x\cdot Z' = \frac{2Z}{1-Z^2}$$

$$x\cdot Z' = \frac{2Z}{1-Z^2} - \frac{Z}{1} \Rightarrow \frac{Z+Z^3}{1-Z^2}$$

$$x\cdot\frac{dZ}{dx} = \frac{Z+Z^3}{1-Z^2} \Rightarrow \int\frac{1-Z^2}{Z+Z^3}\,dZ = \int\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{1-Z^2}{Z(1+Z^2)}\,dZ = \ln x + \ln c$$

← نفرق هذا الكسر

نفرق الكسر:

$$\int\frac{dZ}{Z(1+Z^2)} - \int\frac{2Z^2}{2Z(1+Z^2)}\,dZ = \ln cx$$

$$\int\frac{dZ}{Z} - \int\frac{2Z}{2(1+Z^2)}\,dZ - \frac{1}{2}\ln(1+Z^2) = \ln cx$$

$$\ln Z - \frac{1}{2}\ln(1+Z^2) - \frac{1}{2}\ln(1+Z^2) = \ln cx$$

$$\ln Z - \ln(1+Z^2) = \ln cx \Rightarrow \ln\frac{Z}{1+Z^2} = \ln cx$$

أخذ e الطرفين ⇐ $\boxed{\frac{Z}{1+Z^2} = cx}$ الحل العام

بالعودة إلى المتحولات القديمة:

$$\frac{\frac{y}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = cx \Rightarrow$$

$$\frac{xy}{x^2+y^2} = cx \Rightarrow \boxed{x^2+y^2 = cy}$$